176. $y\dfrac{dy}{dx}=A(x)y+B(x)$ ニ就テ, II.

福原 満洲雄（北大）

$$\text{(a)}\qquad y\frac{dy}{dx}=A(x)y+B(x)$$

ニ於テ $A(x)$, $B(x)$ ハ $x\to\infty$ ノ時

$$(1)\qquad \begin{cases} A(x)\sim a_{-m}x^{m}+a_{-m+1}x^{m-1}+\cdots\cdots \\ B(x)\sim b_{-n}x^{n}+b_{-n+1}x^{n-1}+\cdots\cdots \end{cases}$$

ナル形ニ近似的ニ展開サレルモノトスル、前回（第46号）ニ於テハ $2m+1<n$ ノ場合ヲ論ジ、其ノ際 Malmquist ノ定理ノ擴張ニ関スル一ツノ予想定理ヲ述ベタガ、$2m+1>n$ ノ場合ニモコノ豫想ハ正シイ、以下簡單ニ今迄ニ得タ結果ヲ述ベヨウ。

I. 先ヅ $x\to\infty$ ノ時

$$y/x^{\rho},\qquad \frac{dy}{dx}\Big/x^{\rho-1}$$

ガ有限ナ0デナイ値ニ収斂スルヤウナ (a) ノ解ガ存在スル爲

ニハ

$$\rho = m+1 \quad 又ハ \quad n-m$$

デナケレバナラナイ。

$$(\alpha) \quad y \sim x^{m+1}\{\alpha_0+\alpha_1 x^{-1}+\cdots\cdots+\alpha_j x^{-j}+\cdots\cdots\} \quad (\alpha_0 \neq 0)$$

ガ (a) ヲ形式的ニ満足スルヤウニ $\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots$ ヲキメルコトガ出來ル。 但シ $\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_m$ ハ常數, $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \cdots\cdots$ ハ $p \log x + C$ (p ハ一般ニ 0 デナイ, キマッタ常數、C ハ任意ノ常數) ノ整多項式デアル、而モ其ノヤウナキメ方ハ唯一通リデアル、又

$$(\beta) \quad y \sim x^{n-m}\{\beta_0+\beta_1 x^{-1}+\cdots\cdots+\beta_j x^{-j}+\cdots\cdots\} \quad (\beta_0 \neq 0)$$

ガ (a) ヲ形式的ニ満足スルヤウニ常數 $\beta_0, \beta_1, \cdots\cdots$ ヲキメルコトガ出來ル、而モ其ノヤウナキメ方ハ唯一通リデアル。

以上ハ形式的ノ計算カラ得ラレルノデアルカラ變數ハ實數デアラウト、ナカラウト問題デハナイ、次ニ解ノ存在定理及ビ單独性カラ導カレル結果ヲ述ベヨウ。

2. (α) ニ關シテハ $2m+1 < m$ ノ場合ト同ジヤウニ次ノ結論ヲ得ル。

I. (1) ガ $x \to +\infty$ (或ハ $\Omega+0 < \arg x < \Omega'-0, x \to \infty$) ノ時ニ成立スルナラバ, (α) ガ含ム任意常數 C ニ或値 (任意) ヲ與ヘタトキ

$$x \to +\infty \ (或ハ\ \Omega+0 < \arg x < \Omega'-0,\ x \to \infty)$$

デ (α) ヲ近似展開トスル (a) ノ解ハ存在シ而モ唯一ツデアル。

II. $\delta < |\alpha_0|$ ナラバ. $|x_0|$ が十分ニ大キイトキ 初期條件

$$|y(x_0)-\alpha_0 x_0^{m+1}| \leqq \delta |x_0|^{m+1}$$

ヲ満足スル (a) ノ解ハ必ズ (α) ナル形ニ展開サレル。

III. C ハ x_0, $y_0\left(=y(x_0)\right)$ ニ依ッテキマルカラ, C ヲ x_0, y_0 ノ函數ト見做スコトが出來ル。若シ

$$|y_0-\alpha_0 x_0^{m+1}| < \delta |x_0|^{m+1}$$

ナラバ

$$|C| \leqq 2^{m+1}\delta |x_0|^{m+1}$$

デアル。

3. (β) ニ関シテハ多少様子が異ナル、$x \to +\infty$ ノ時ニハ a_{-m}^2/b_{-n} ノ實部が重要ナ役割ヲ演ズル、モット一般ニ $\arg x = \theta$ (一定) ナル直線ニ沿ッテ x が ∞ ニ近ヅクナラバ

$$-\omega = \arg\left(-\frac{a_{-m}^2}{b_{-n}}\right)$$

ト置イタトキ $\cos\left((2m-n+1)\theta-\omega\right)$ ノ符号が重要ナ意味ヲ持ツ、併シ其ノ時ニハ $x = re^{i\theta}$ ト置キ r ダケヲ変数ト考ヘレバヨイカラ $x \to +\infty$ ノ場合ダケヲ考ヘル。

IV. $R(a_{-m}^2/b_{-n}) > 0$ ノ場合、(1) が $x \to +\infty$ ノトキ成立スルナラバ, 十分ニ小サナ正ノ數 ε ニ對シテ x_0 が十分ニ大キケレバ

$$|y_0-\beta_0 x_0^{n-m}| < \varepsilon x_0^{n-m}$$

ナル初期條件ヲ満足スル (a) ノ解ハ $x \to +\infty$ ノ時 (β) ナル形ニ展開サレル．(β) ハ任意常數ヲ含マナイカラ、無限ニ多クノ解ガ同ジ近似展開ヲ許スコトニナル。

V. $R(a_{-m}^2/b_{-n})<0$ ノ場合．(1) ガ $x \to +\infty$ ノ時成立スルナラバ、$x \to +\infty$ ノ時

$$|y-\beta_0 x^{n-m}|<\varepsilon x^{n-m}$$

ヲ満足スル (a) ノ解ハ唯一ツデ、其ノ解ハ (β) ナル形ニ展開サレル。

$\cos((2m-n+1)\theta-\omega)>0$ デアルヤウナ方向ニ関シテハVト，$\cos((2m-n+1)\theta-\omega)<0$ デアルヤウナ方向ニ関シテハ IV ト同様ナ結論ガ得ラレル。

$\cos((2m-n+1)\theta-\omega)=0$ トナルヤウナ方向ハ

$$\omega_k=\frac{\omega+(2k-1)\pi}{2(2m-n+1)} \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots\cdots)$$

ニ依テ與ヘラレル、此ノ方向ニハ一般ノ方法ガ利用出來ナイ。

4. 近似展開 (1) ハ

$$\Omega+0<\arg x<\Omega'-0, \quad x\to\infty$$

デ成立シ

$$\max(\Omega,\omega_k)<\theta_0<\min(\Omega',\omega_{k+1})$$

デアルトスル。

VI. $\arg x=\theta_0$, $x\to\infty$ ノトキ (β) ナル形ニ展開サレル (a) ノ解ニ對シテ、其ノ近似展開ハ

$$\max(\Omega,\omega_k)+0<\arg x<\min(\Omega',\omega_{k+1})-0,$$

$x \to \infty$ デ成立スル。若シ k ガ偶数ナラバ其ノ近似展開ハモット廣イ。

$$\max(\mathcal{S}, \omega_{k-1})+0 < \arg x < \min(\mathcal{S}', \omega_{k+2})-0,\ x\to\infty$$

デ成立スル。

5. (1) ノ右辺ガ収斂デソノ和ガ $A(x)$, $B(x)$ ニ等シイトキ, 上ニ述ベタ I ―― VI ヲ使フト次ノ結果ガ得ラレル。

VII. $|x|>R$ デ常ニ $|y-\beta_0 x^{n-m}| < \varepsilon |x|^{n-m}$ ヲ満足スル (a) ノ解ガ存在スレバ, (β) ハ収斂デ其ノ和ガ其ノ解ト一致スル。但シ ε ハ V ニ於ケルト同ジ意味ノモノデアル。

VIII. (a) ガ $|x|>R$ デ $|y-\alpha_0 x^{m+1}| \leqq \delta |x|^{m+1}$ ヲ満足スル解ヲ持テバ級数 (α) ノ係数ハ $\log x$ ヲ含マズ, 級数 (α) ハ収斂デ, ソノ和ガ其ノ解ト一致スル、但シ δ ハ II ニ於ケルト同ジ意味ノモノデアル。

―― (續ク) ――

正　誤

第46号, 1頁, 10行目, 11行目ノ p ハ ρ ノ誤リ。

第48号, 3頁, 9行目ニ $F(y_0)+h(x_0) \neq 0$ ナル假定ヲ入レル。